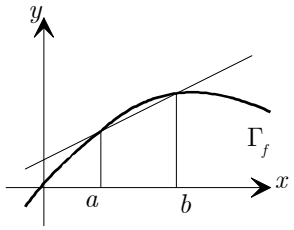
Dérivation

I et J désignent des intervalles non singuliers de $\mathbb{R}$.

I. Dérivées d'une fonction réelle



1°) Nombre dérivé

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et Γ_f le graphe de f.

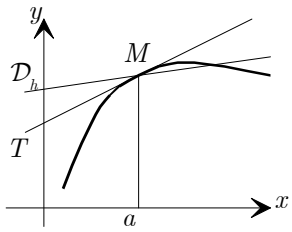
Pour étudier Γ_f, on introduit le paramétrage $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$ de point courant $M(t)$.

Déf : Soit $a, b \in I$ tels que $a \neq b$. On appelle taux de variation de f entre a et b le réel :

$\tau(a,b) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Déf : On dit que f est dérivable en $a \in I$ ssi $\lim\limits_{h\to 0} \tau(a, a+h) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\big(f(a+h)-f(a)\big)$ existe et est finie.

Celle-ci est alors appelée nombre dérivé de f en a et est notée $f'(a)$.



Prop : Si f est dérivable en $a \in I$ alors Γ_f admet une tangente en $M(a)$ qui est la droite T d'équation $y = f'(a)(x-a)+f(a)$. Par abus on dit que T est la tangente de f en a.

Prop : Si f est dérivable en $a \in I$ alors au voisinage de a :

$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$.

Cette relation est appelée développement limité à l'ordre 1 de f en a.

Prop : Si f est continue en $a \in I$ et que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}(f(a+h)-f(a)) = +\infty$ ou $-\infty$

alors f n'est pas dérivable en a et Γ_f admet une tangente verticale en $M(a)$ qui est la droite d'équation $x = a$. Par abus on dit que f admet une tangente verticale en a.

2°) Fonction dérivée

Déf : On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable ssi f est dérivable en tout point de I.

On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I vers $\mathbb{R}$ dérivable.

Prop : Si f est dérivable alors f est continue. La réciproque est fausse.

Déf : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, on introduit la fonction $\begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$ appelée fonction dérivée de f. Celle est encore parfois notée $\mathrm{D}f$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

3°) Opérations sur les fonctions dérivables

a) somme, produit et rapport

Théorème :

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont dérivables alors $\lambda.f, f+g, fg$ le sont aussi et de plus :

$(\lambda.f)' = \lambda.f', (f+g)' = f'+g'$ et $(fg)' = f'g + fg'$.

Cor : Si $f_1, ..., f_n : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables alors $f_1 + \cdots + f_n$ et $f_1 \ldots f_n$ le sont aussi et de plus

$(f_1 + \cdots + f_n)' = f_1' + \cdots + f_n'$ et $(f_1 \ldots f_n)' = \sum\limits_{i=1}^{n} f_1 \ldots f_{i-1} (f_i)' f_{i+1} \ldots f_n$.

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I, f(x) \neq 0$.

Si f est dérivable alors $1/f$ l'est aussi et $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.

Cor : Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in I, g(x) \neq 0$.

Si f et g sont dérivables alors f/g l'est aussi et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

b) composition

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $\varphi : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$.

Si f et φ sont dérivables alors $\varphi \circ f$ l'est aussi et $(\varphi \circ f)' = f' \times \varphi' \circ f$.

c) application réciproque

Théorème :

Soit $f : I \to J$ une bijection continue.

Si f est dérivable en $x \in I$ et $f'(x) \neq 0$ alors $f^{-1} : J \to I$ est dérivable en $y = f(x)$ et

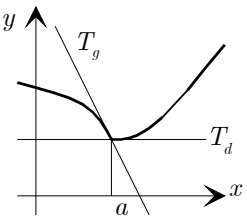
$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$.

Cor : Soit $f : I \to J$ une bijection dérivable.

Si $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

4°) Dérivée à droite, dérivée à gauche

Déf : On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable à droite en $a \in I$ (resp. à gauche) ssi $\lim_{h \to 0+} \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$ (resp. $\lim_{h \to 0+} \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$) existe et est finie. Cette limite est alors appelée nombre dérivé à droite (resp. à gauche) de f en a et on la note $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$)



Déf : Si f est dérivable à droite en a (resp. à gauche) alors la droite T_d d'équation $y = f'_d(a)(x-a) + f(a)$ (resp. $y = f'_g(a)(x-a) + f(a)$) est appelée demi-tangente à droite à f en a (resp. à gauche).

Prop : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a intérieur à I . On a équivalence entre :

(i) f est dérivable en a ,

(ii) f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

De plus, si tel est le cas, $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

5°) Dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$

a) définition

Déf : Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

On pose $f^{(0)} = f$ appelée dérivée d'ordre 0 de f .

Si f est dérivable, on note $f^{(1)} = f'$ appelée dérivée d'ordre 1 de f .

Si de plus f' est dérivable, on pose $f^{(2)} = f'' = (f')'$ appelée dérivée d'ordre 2 de f .

Ainsi, de proche en proche, si f possède une dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$, notée $f^{(n)}$, et si celle-ci est dérivable, on pose $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ appelée dérivée d'ordre $n+1$ de f .

Déf : On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable ssi $f^{(n)}$ existe.

On dit que f est indéfiniment dérivable ssi f est n fois dérivable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) opérations sur les fonctions n fois dérivables

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Théorème :

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont n fois dérivables alors $\lambda.f, f+g, fg$ le sont aussi et $(\lambda.f)^{(n)} = \lambda.f^{(n)}$,

$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$ et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$.

lemme :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On a équivalence entre :

(i) f est $(n+1)$ fois dérivable,

(ii) f est dérivable et f' est n fois dérivable.

De plus, si tel est le cas, $f^{(n+1)} = (f')^{(n)}$

Théorème :

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in I, g(x) \neq 0$.

Si f et g sont n fois dérivables alors f/g l'est aussi.

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $\varphi : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$.

Si f et φ sont n fois dérivables alors $\varphi \circ f$ l'est aussi.

Théorème :

Soit $f : I \to J$ une bijection continue.

Si f est n fois dérivable (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$ alors $f^{-1} : J \to I$ est n fois dérivable.

6°) Classe d'une fonction

a) définition

Déf : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ ssi $f^{(n)}$ existe et est continue.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^n$ définies sur I .

Déf : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ ssi elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble de ces fonctions.

Ainsi $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

b) opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

lemme :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a équivalence entre :

(i) f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$,

(ii) f est dérivable et f' est de classe $\mathcal{C}^n$.

Les théorèmes suivants se justifient par récurrence :

Théorème :

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ alors $\lambda.f, f+g, fg$ le sont aussi.

Si de plus $\forall x \in I, g(x) \neq 0$ alors f/g est aussi $\mathcal{C}^n$.

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$ et $n \in \mathbb{N}$.

Si f et g sont $\mathcal{C}^n$ alors $g \circ f$ l'est aussi.

Théorème :

Soit $f : I \to J$ bijection continue et $n \in \mathbb{N}^*$.

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ et $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$ alors $f^{-1} : J \to I$ est $\mathcal{C}^n$.

II. Théorème des accroissements finis

1°) Extremum local

Déf : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

On dit que f admet un minimum local en a (resp. maximum local) ssi $\exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap [a-\alpha, a+\alpha]$, $f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$).

On parle alors d'extremum local.

Déf : Pour un intervalle I non vide, on note $\overset{\circ}{I}$ l'intervalle ouvert de même extrémité que I.

Prop : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overset{\circ}{I}$.

Si f admet un extremum local en a et si f est dérivable en a alors $f'(a) = 0$.

2°) Théorème de Rolle

Théorème :

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et si $f(a) = f(b)$ alors $\exists c \in]a,b[, f'(c) = 0$.

3°) Théorème des accroissements finis

Théorème : TAF

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

4°) Applications du TAF

a) inégalités des accroissements finis

Théorème : IAF

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.

Si $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in I, m \leq f'(x) \leq M$

alors $\forall a, b \in I$ tels que $a \leq b$ on a $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

Cor : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.

Si $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in I, |f'(x)| \leq M$

alors $\forall x, y \in I, |f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$ autrement dit f est M lipschitzienne.

b) variations d'une fonction dérivable

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.

f est croissante ssi $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$.

f est décroissante ssi $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$.

f est constante ssi $\forall x \in I, f'(x) = 0$.

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.

Si $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

Cor : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) sur I sauf peut-être en un nombre fini de points où $f'(x)$ s'annule ou bien n'est pas défini, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

c) obtention de la dérivabilité par limite

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose que f est continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=\ell$ alors f est dérivable en a et $f'(a)=\ell$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=+\infty$ (ou $-\infty$) alors f a une tangente verticale en a.

III. Extension aux fonctions complexes

Les définitions qui suivent prolongent celles vues dans le cadre réel.

1°) Fonction dérivée

Déf : On dit que $f:I\to\mathbb{C}$ est dérivable en a ssi $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}(f(a+h)-f(a))$ existe dans $\mathbb{C}$. Celle-ci est alors notée $f'(a)$. On dit que f est dérivable ssi f est dérivable en tout point de I.

L'application $f':\begin{cases} I\to\mathbb{C} \\ t\mapsto f'(t)\end{cases}$ est alors appelée fonction dérivée de f.

Théorème :

Soit $f,g:I\to\mathbb{C}$ et $\lambda\in\mathbb{C}$.

Si f et g sont dérivables alors $\lambda.f, f+g, fg$ et $\overline{f}$ le sont aussi et :

$(\lambda.f)'=\lambda.f', (f+g)'=f'+g', (fg)'=f'g+fg'$ et $(\overline{f})'=\overline{f'}$.

Si de plus $\forall t\in I, g(t)\neq 0$ alors f/g est dérivable et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$.

Cor : Soit $f:I\to\mathbb{C}$. On a équivalence entre :

(i) f est dérivable,

(ii) $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables.

De plus, si tel est le cas, $\mathrm{Re}(f')=(\mathrm{Re}\,f)'$ et $\mathrm{Im}(f')=(\mathrm{Im}\,f)'$.

Théorème :

Soit $f:I\to\mathbb{R}$ et $\varphi:J\to\mathbb{C}$ telles que $f(I)\subset J$.

Si f et φ sont dérivables alors $\varphi\circ f$ l'est aussi et $(\varphi\circ f)'=f'\times\varphi'\circ f$.

Prop : Soit $f:I\to\mathbb{C}$.

Si f est dérivable alors $t\mapsto \mathrm{e}^{f(t)}$ l'est aussi et $(\mathrm{e}^{f(t)})'=f'(t)\mathrm{e}^{f(t)}$.

2°) Classe d'une fonction complexe

Déf : Soit $f:I\to\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}$.

Tout comme pour les fonctions réelles on définit, si elle existe, la dérivée d'ordre n de f notée $f^{(n)}$.

Prop : Soit $f:I\to\mathbb{C}$. On a équivalence entre :

(i) f est n fois dérivable,

(ii) $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont n fois dérivable.

De plus, si tel est le cas : $\mathrm{Re}(f^{(n)})=\mathrm{Re}(f)^{(n)}$ et $\mathrm{Im}(f^{(n)})=\mathrm{Im}(f)^{(n)}$.

Déf : Soit $f:I\to\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}$.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ ssi $f^{(n)}$ existe et est continue.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ ssi f est $\mathcal{C}^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Pour $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, on note $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions complexes définies et de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Prop : $f:I\to\mathbb{C}$ est $\mathcal{C}^n$ ssi $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

Théorème :

Soit $f,g:I\to\mathbb{C}$, $\lambda\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$.

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ alors $\lambda.f, f+g, fg$ et $\overline{f}$ le sont aussi.

Si de plus $\forall t\in I, g(t)\neq 0$ alors f/g est aussi de classe $\mathcal{C}^n$.

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $\varphi : J \to \mathbb{C}$ telles que $f(I) \subset J$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Si f et γ sont de classe $\mathcal{C}^n$ alors $\varphi \circ f$ l'est aussi.

Prop : Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Si f est $\mathcal{C}^n$ alors $t \mapsto \mathrm{e}^{f(t)}$ l'est aussi.

3°) Théorèmes de dérivation

a) inégalité des accroissements finis

Théorème : IAF

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable.

Si $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall t \in I, |f'(t)| \leq M$ alors $\forall x, y \in I, |f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$ autrement dit f est M lipschitzienne.

Cor : Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable.

f est constante ssi $f' = 0$.

b) prolongement de la dérivée

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$ telle que f soit dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

Si f est continue en a et que $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

4°) Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ définie sur I.

$f(t) = (x(t), y(t))$. Les fonctions x et y sont les fonctions coordonnées de f.

Déf : On dit que f est dérivable en a ssi $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$ existe dans $\mathbb{R}^2$. Celle-ci est alors notée $f'(a)$. On dit que f est dérivable ssi f est dérivable en tout point de I.

L'application $f' : \begin{cases} I \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto f'(t) \end{cases}$ est alors appelée fonction dérivée de f.

Prop : f est dérivable ssi ses fonctions coordonnées x et y le sont.

De plus, si tel est le cas : $\forall t \in I, f'(t) = (x'(t), y'(t))$.

Déf : Tout comme pour les fonctions réelles et complexes, on définit la notion de dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ et de classe d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Prop : f est de classe $\mathcal{C}^n$ (avec $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) ssi ses fonctions coordonnées le sont.

IV. Convexité

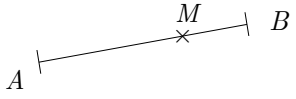
On munit le plan géométrique $\mathcal{P}$ d'un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Paramétrage d'un segment

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(\lambda) = (1-\lambda)a + \lambda b$.

φ est continue, monotone. $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$ donc φ réalise une surjection de $[0,1]$ sur le segment I d'extrémités a et b.

Déf : On dit φ réalise un paramétrage du segment I d'extrémités a et b.



Soit $A \begin{vmatrix} x_A \\ y_A \end{vmatrix}$ et $B \begin{vmatrix} x_B \\ y_B \end{vmatrix}$ deux points du plan $\varphi : [0,1] \to \mathcal{P}$ définie par

$\varphi(\lambda) = M_\lambda \begin{vmatrix} (1-\lambda)x_A + \lambda x_B \\ (1-\lambda)y_A + \lambda y_B \end{vmatrix}$. $\overrightarrow{AM_\lambda} \begin{vmatrix} \lambda(x_B - x_A) \\ \lambda(y_B - y_A) \end{vmatrix}$ donc $\overrightarrow{AM_\lambda} = \lambda \overrightarrow{AV}$

φ réalise une surjection de $[0,1]$ sur $[A, B]$.

Déf : On dit que φ est un paramétrage du segment $[A,B]$.

2°) Partie convexe du plan

Déf : Une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}$ est dite convexe ssi $\forall A,B\in\mathcal{C},[A,B]\subset\mathcal{C}$.

3°) Fonction convexe, fonction concave

Déf : Soit $f:I\to\mathbb{R}$. On dit que f est convexe ssi :
$\forall a,b\in I,\forall\lambda\in[0,1],f(\lambda a+(1-\lambda)b)\leq\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$.

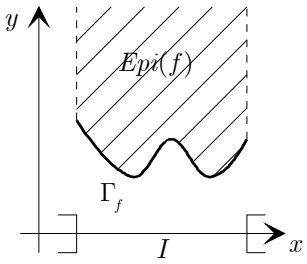
Déf : Soit $f:I\to\mathbb{R}$. On dit que f est concave ssi :
$\forall a,b\in I,\forall\lambda\in[0,1],f(\lambda a+(1-\lambda)b)\geq\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$.

Prop : Soit $f:I\to\mathbb{R}$. On a équivalence entre :
(i) f est concave,
(ii) $-f$ est convexe.

4°) Caractérisation de la convexité

a) épigraphe

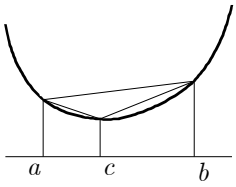
Déf : Soit $f:I\to\mathbb{R}$. On appelle épigraphe de f l'ensemble :
$$Epi(f)=\left\{M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.\in\mathcal{P}/x\in I,y\leq f(x)\right\}.$$



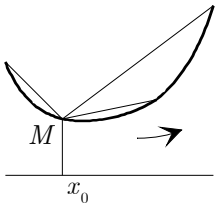
Théorème :
Soit $f:I\to\mathbb{R}$. On a équivalence entre :
(i) f est convexe,
(ii) $Epi(f)$ est convexe.

b) taux d'accroissement

lemme :
Soit $f:I\to\mathbb{R}$. On a équivalence entre :
(i) f est convexe,
(ii) $\forall a,b,c\in I$ tels que $a<c<b$:
$\tau(a,c)\leq\tau(a,b)\leq\tau(c,b)$,
(iii) $\forall a,b,c\in I$ tels que $a<c<b,\tau(a,c)\leq\tau(c,b)$.



Théorème :
Soit $f:I\to\mathbb{R}$. On a équivalence entre :
(i) f est convexe,
(ii) $\forall x_0\in I$ la fonction $\tau_{x_0}:I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ définie par $\tau_{x_0}(x)=\tau(x_0,x)$ est croissante.



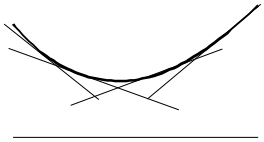
c) exploitation de la dérivée

Théorème :
Soit $f:I\to\mathbb{R}$ dérivable. On a équivalence entre :
(i) f est convexe,
(ii) f' est croissante.

Cor : Soit $f:I\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable.
f convexe $\Leftrightarrow f''\geq 0$.
f concave $\Leftrightarrow f''\leq 0$.

5°) Position relative d'une courbe et de sa tangente en un point

Théorème :
Soit $f:I\to\mathbb{R}$ dérivable.
Si f est convexe alors Γ_f est au dessus de chacune de ses tangentes.



Cor : Si f est concave alors Γ_f est en dessous de chacune de ses tangentes

6°) Inégalités de convexité

lemme :

Soit I un intervalle et $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall a_1,\dots,a_n \in I, \forall \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $\lambda_1+\dots+\lambda_n = 1$ on a :

$x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \in I$.

Théorème : (Inégalité de Jensen)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall a_1,\dots,a_n \in I, \forall \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $\lambda_1+\dots+\lambda_n = 1$ on a :

$f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) \le \lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_n f(a_n)$.

En particulier :

Pour $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1/n$ on obtient $f\left(\dfrac{a_1+\dots+a_n}{n}\right) \le \dfrac{1}{n}\left(f(a_1)+\dots+f(a_n)\right)$.

Prop : $\forall a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}^+, \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \le \dfrac{a_1+\dots+a_n}{n}$.

V. Etude graphique d'une fonction

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Pour étudier Γ_f, on introduit le paramétrage $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$ de point courant $M(t)$.

1°) Réduction du domaine d'étude

Si $I = \mathbb{R}$ et f fonction T périodique alors on peut limiter l'étude de f à un intervalle de longueur T car $M(t+T)$ est l'image de $M(t)$ par la translation de vecteur $T.\vec{i}$.

Si I est symétrique par rapport à t_0 et que $f(2t_0 - t) = f(t)$ alors $f(t_0 - h) = f(t_0 + h)$ donc $M(t_0+h) = s_\Delta(M(t_0-h))$ avec $\Delta : x = t_0$.

Si I est symétrique par rapport à t_0 et que $f(2t_0 - t) = -f(t)$ alors $M(t_0+h) = s_\Omega(M(t_0-h))$ avec $\Omega\begin{vmatrix} t_0 \\ 0 \end{vmatrix}$.

Dans les deux cas, on peut limiter l'étude à $I \cap [t_0, +\infty[$ ou $I \cap]-\infty, t_0]$.

2°) Etude en un point

Si f est dérivable en a alors Γ_f admet une tangente en $M(a)$ qui est de pente $f'(a)$. C'est la droite d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Supposons f deux fois dérivable au voisinage de a.

Si $f''(x) \ge 0$ (resp. $f''(x) \le 0$) au voisinage de a, alors f est convexe (resp. concave) au voisinage de a et Γ_f est alors localement au dessus (resp. en dessous) de sa tangente en a.

figure

Si $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en a alors f est convexe d'un côté de a et concave de l'autre, on dit que f présente un point d'inflexion en a et que Γ_f traverse sa tangente en a.

figure

3°) Etude aux extrémités ouvertes de l'intervalle de définition

a) prolongement par continuité

Soit a une extrémité ouverte finie de I.

Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ alors on peut prolonger f par continuité en a en posant $f(a) = \ell$.

Si de plus $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell'$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

En revanche si $f'(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable en a mais son graphe y présente une tangente verticale.

b) asymptote verticale

Soit a une extrémité ouverte finie de I.

Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$ alors la droite Δ d'équation $x = a$ est asymptote à Γ_f.

En effet $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{f(t)}{t} \xrightarrow[t\to a]{} \pm\infty$ et $x(t) \to a$.

c) asymptote oblique et branche parabolique

Supposons que $+\infty$ soit une extrémité de I (l'étude est identique en $-\infty$)

Si $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \alpha \in \mathbb{R}$ et $f(x) - \alpha x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \beta \in \mathbb{R}$ alors la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est asymptote à Γ_f en $+\infty$.

En effet $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \alpha \in \mathbb{R}$ et $y(t) - \alpha x(t) \to \beta \in \mathbb{R}$.

Il est alors usuel de positionner la courbe par rapport à son asymptote en étudiant le signe de $f(x) - (\alpha x + \beta)$ au voisinage de $+\infty$.

Si $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \alpha \in \mathbb{R}$ et $f(x) - \alpha x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$ alors Γ_f présente une branche parabolique de direction $y = \alpha x$.

En effet $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \alpha \in \mathbb{R}$ et $y(t) - \alpha x(t) \to \pm\infty$.

Si $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$ alors Γ_f présente une branche parabolique verticale.

VI. Suites récurrentes réelles

1°) Vocabulaire

Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Déf : Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. On appelle suite récurrente d'ordre 1 de fonction itératrice f toute suite $(u_n) \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Prop : (Condition suffisante d'existence)
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{D}$.
Si $\forall x \in \mathcal{D}, f(x) \in \mathcal{D}$ (i.e. $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$) alors il existe une unique suite $(u_n) \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

2°) Exemples d'étude de suite récurrente réelle

Pour étudier (u_n) donnée par $u_{n+1} = f(u_n)$:

- on justifie l'existence de la suite en exploitant le résultat ci-dessus où en justifiant par récurrence l'existence de u_n,
- si cela est possible, on exprime le terme général de (u_n) et on poursuit l'étude à partir de celui-ci.
- Sinon, on détermine les limites finies ℓ possibles en passant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ à la limite.
- on peut ensuite. soit étudier la monotonie de (u_n) en étudiant le signe $u_{n+1} - u_n$, soit étudier $|u_n - \ell|$ avec ℓ limite finie possible.

3°) Exploitation de l'IAF

Théorème :

Soit $f:[a,b]\to[a,b]$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall x\in[a,b],|f'(x)|<1$.

f admet un unique point fixe α et toute suite récurrente $(u_n)\in[a,b]^{\mathbb{N}}$ de fonction itératrice f converge vers α.

4°) Méthode de Newton

Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ s'annulant. On désire déterminer une approximation numérique d'une solution α de l'équation $f(x)=0$ par une méthode plus efficace que la dichotomie. Pour cela on construit une suite récurrente (u_n) de la manière suivante :

On choisit $u_0\in I$ « voisin » de α puis pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit u_{n+1} comme étant l'abscisse d'intersection de la tangente à f en u_n avec l'axe (Ox).

Théorème :

Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ s'annulant en $\alpha\in I$ telle que f' et f'' ne s'annule pas.

Pour tout $a\in I$ tel que $f(a)f''(a)\geq 0$ la suite (u_n) définie par :

$u_0=a$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_n-\dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$

est bien définie et converge vers α.